Señales y Sistemas
Capítulo 3: Sistemas

Sebastián E. Godoy (segodoy@udec.cl)

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Concepción, Concepción, Chile

June 2, 2015

Tabla de Contenidos

Fundamentos

Recordemos: Un sistema es cualquier medio físico, proceso o algoritmo de computador que transforma una señal de entrada, x en una de salida y mediante el mapeo T, es decir: $y = T(x)$.

Ejemplos:

- Circuitos electrónicos
- Sistemas biológicos: audiovisual, cardiaco, etc.
- Sistemas socio-económicos: El mercado de acciones, redes sociales, etc.

Recordaremos nuestras definiciones para sistemas de tiempo continuo. Para tiempo discreto las definiciones son esencialmente las mismas.

Causalidad

Un sistema T es **causal** si su salida al instante t no depende de los valores de la entrada en cualquier tiempo mayor a t.

Ejemplos:

1. **Predictor ideal:** $y(t) = x(t+1)$ es no causal dado que la salida al instante t depende de la entrada en el futuro $t+1$
2. **Retardo ideal:** $y(t) = x(t-1)$ es causal puedo que la salida en el instante t depende de la entrada en el tiempo pasado $t-1$
3. **Filtro de media móvil (moving average, MA):** $y[n] = \frac{x[n-1]+x[n]+x[n+1]}{3}$ no es causal puesto que la salida en el instante n depende en parte de la entrada futura $n+1$

La mayoría de los sistemas físicos son causales; sin embargo, sistemas no-causales son usados ampliamente en procesamiento de señales, por ejemplo, para "suavizar" señales y remover ruido.

Memoria

Un sistema causal T es llamado **sin memoria** si la salida en el instante t depende solamente de la entrada en el instante t. Sino, es llamado con memoria.

Ejemplos:

1. **Amplificador ideal:** $y(t) = Kx(t)$ con $K > 0$ es un sistema sin memoria pues la salida en el instante t depende solo de la entrada en el instante t
2. **Integrador:** $y(t) = \int_{-\infty}^{T} x(\tau)d\tau$ tiene memoria dado que la salida al instante t depende de la entrada para $-\infty < \tau \leq t$

Linealidad

Un sistema T es **lineal** si satisface la propiedades de **aditividad** y de **homogeneidad** las que se resumen en la siguiente propiedad:

Si $y_1 = T(x_1)$ y $y_2 = T(x_2)$, entonces para cualquier par de números a_1 y a_2, entonces

$$T(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1T(x_1(t)) + a_2T(x_2(t))$$

Recuerde que esto es una gran propiedad y que suele tomarse superficialmente al verse expresada por tan pocos términos.

Linealidad - Ejemplo 1

El sistema

$$y(t) = t^2 x(t)$$

Es aditivo? Si, pues

$$\begin{aligned} T(x_1(t) + x_2(t)) &= t^2(x_1(t) + x_2(t)) \\ &= t^2 x_1(t) + t^2 x_2(t) \\ &= T(x_1(t)) + T(x_2(t)) \end{aligned}$$

Es homogeneo? Si, pues

$$T(ax(t)) = t^2(ax(t)) = a(t^2 x(t)) = aT(x(t))$$

Por lo tanto el sistema es lineal.

Linealidad - Ejemplo 2

El sistema

$$y(t) = x^2(t)$$

Es aditivo? No, pues

$$\begin{aligned} T(x_1(t) + x_2(t)) &= (x_1(t) + x_2(t))^2 \\ &= x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) \\ &= T(x_1(t)) + 2x_1(t)x_2(t) + T(x_2(t)) \\ &\neq T(x_1(t)) + T(x_2(t)) \end{aligned}$$

Es homogeneo? No, pues

$$T(ax(t)) = (ax(t))^2 = a^2x^2(t) \neq ax^2(t)$$

Por lo tanto el sistema no es lineal

Linealidad - Ejemplo 3

El sistema $y(t) = 3x(t) + 2$

Es aditivo? Por una parte

$$T(x_1(t) + x_2(t)) = 3(x_1(t) + x_2(t)) + 2$$

Por otra parte

$$T(x_1(t)) + T(x_2(t)) = 3(x_1(t) + x_2(t)) + 4$$

Por lo tanto $T(x_1(t) + x_2(t)) \neq T(x_1(t)) + T(x_2(t))$, es decir el sistema no es aditivo.

Es homogeneo? Por una parte: $T(ax(t)) = 3ax(t) + 2$. Por otra parte:

$$aT(x(t)) = 3ax(t) + 2a \neq T(az(t))$$

Por lo que no es homogeneo.

Por lo tanto el sistema no es lineal

Invariabilidad en el tiempo

Un sistema T es **invariante en el tiempo** (I.T.) si para una entrada x y cualquier tiempo fijo t_0 la salida a entrada $x(t-t_0)$, $T(x(t-t_0))$, es igual a $y(t-t_0)$, en donde $y(t) = T(x)(t)$.

Ejemplo: Considere el sistema

$$y(t) = 3x^2(t)u(t)$$

Tenemos que para entrada $x(t-t_0)$

$$T(x(t-t_0)) = 3x^2(t-t_0)u(t)$$

En cambio la salida retardada es

$$y(t-t_0) = 3x^2(t-t_0)u(t-t_0) \neq T(x(t-t_0))$$

a menos que $t_0 = 0$. Por lo tanto el sistema es **variable en el tiempo**.

Invariabilidad en el tiempo - Ejemplo

Para el sistema

$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau} x(\tau)\, d\tau$$

Por un lado tenemos

$$y(t - t_0) = \int_0^{t-t_0} e^{-2\tau} x(\tau)\, d\tau$$

Por otro lado

$$T(x(t-t_0)) = \int_0^t e^{-2\tau} x(t-t_0)\, d\tau = e^{-2t_0} \int_{-t_0}^{t-t_0} e^{-2\tau} x(\tau)\, d\tau \neq y(t-t_0)$$

Por lo tanto el sistema es variable en el tiempo

Ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

En el Capítulo 1 introdujimos el concepto de modelación de sistemas mediante ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes (EDOCC).

Ejemplo: Circuito RC con fuente corriente está modelado por la EDO:

$$v'(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{C}i(t)$$

Ejemplo: Circuito RLC con fuente de voltaje está modelado por la EDO:

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}v'(t)$$

Ambos son sistemas L.I.T.!!!

Muchos sistemas LIT son descritos por EDOCC

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t)$$

en donde los coeficientes $\{a_n\}_{n=0}^{N}$ y $\{b_m\}_{m=0}^{M}$ son independientes del tiempo, t. En general $a_N = 1$.

Ya sabemos que un SLIT con respuesta a entrada impulso $h(\cdot)$ la salida y para cualquier entrada x esta determinada por la convolución

$$y = x * h$$

Pero... **Cuál es la respuesta impulso para un sistema descrito por EDOCC?**

Respuesta impulso EDO primer orden

Supongamos un sistema descrito por la EDO

$$y'(t) + ay(t) = x(t)$$

Resolvamos $y(t)$ usando el método de factores de integración:

$$e^{at}\left[y'(t) + ay(t)\right] = e^{at}x(t)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(e^{at}y(t)\right)}{dt} &= y(t)\frac{d\left(e^{at}\right)}{dt} + e^{at}\frac{dy(t)}{dt} \\ &= ay(t)e^{at} + e^{at}y'(t) \\ &= e^{at}\left[y'(t) + ay(t)\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\frac{d\left(e^{at}y(t)\right)}{dt} = e^{at}x(t)$$

Integrando en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d\left(e^{a\tau}y(\tau)\right)}{d\tau}d\tau &= \int_0^t e^{a\tau}x(\tau)d\tau \\ \left[e^{a\tau}y(\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=t} &= \int_0^t e^{a\tau}x(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Asumiendo que $y(0) = 0$ tenemos

$$e^{at}y(t) = \int_0^t e^{a\tau}x(\tau)d\tau$$

$$\boxed{\therefore y(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)}x(\tau)\; d\tau}$$

Para encontrar la respuesta a entrada impulso, reemplazamos x por δ para obtener

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t e^{-a(t-\tau)}\delta(\tau)\, d\tau \\ &= \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ e^{-at} & , t > 0 \end{cases} \\ &= e^{-at}u(t) \end{aligned}$$

en donde $u(\cdot)$ es el escalón unitario.

Por lo tanto, la respuesta a entrada impulso de un sistema descrito por una EDO de primer orden es

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

- Denotemos por $Dy(t)$ la primera derivada de y, es decir

$$Dy(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

- Con esta notación podemos escribir la EDO de primer orden mediante

$$Dy(t) + ay(t) = x(t)$$

- Mirando la EDO homogenea:

$$\begin{aligned} Dy(t) + ay(t) &= 0 \\ (D + a)y(t) &= 0 \end{aligned}$$

Notamos que $-a$ es una raiz de la ecuación algebraica $(D + a) = 0$.

Observaciones:

1. La respuesta impulso de un sistema descrito por una EDO $(D+a)y(t)=x(t)$ es simplemente una exponencial multiplicada por uiun escalón unitario.
2. El exponente es rt, en donde r es la solución a la ecuación algebraica $D+a=0$.

Usaremos estas observaciones para EDO de orden superior...

Respuesta impulso EDO segundo orden

Consideremos el sistema descrito por la EDO de segundo orden

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = x(t)$$

y encontremos su respuesta a entrada impulso $h(t)$.

Usando la notación anterior, tenemos que en general la n-ésima derivada se denota por

$$D^n y(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$$

Reescribamos la EDO como

$$D^2 y(t) + aDy(t) + by(t) = \left(D^2 + aD + b\right) y(t) = x(t)$$

Resolviendo la ecuación algebraica $D^2 + aD + b = 0$ tenemos que sus raices son

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad ; \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

entonces

$$D^2 + aD + b = 0 = (D - r_1)(D - r_2)$$

Claim:

$$(D - r_1)(D - r_2)y(t) = y''(t) + ay'(t) + by(t)$$

Proof: En pizarra.

Ahora sabemos que la ecuación diferencial original puede ser escrita como

$$(D - r_1)(D - r_2)y(t) = x(t)$$

La que podemos reescribir como dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}(D - r_2)y(t) &= z(t) \\ (D - r_1)z(t) &= x(t)\end{aligned}$$

Resolvamos ambas ecuaciones del mismo modo en que lo hicimos anteriormente asumiendo que $r_1 \neq r_2$

$$e^{-r_1 t}z(t) = \int_0^t e^{-r_1 \eta}x(\eta)d\eta$$

$$e^{-r_2 t}y(t) = \int_0^t e^{-r_2 \tau}z(\tau)d\tau$$

De la solución de la segunda EDO notamos que requerimos $z(\tau)$ la que puede ser obtenida de la solución de la primera EDO:

$$\begin{aligned}
e^{-r_1 t} z(\tau) &= \int_0^{\tau} e^{-r_1 \eta} x(\eta) d\eta \\
z(\tau) &= \int_0^{\tau} e^{r_1 (t-\eta)} x(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

Reemplazando en la solución de la segunda EDO tenemos

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^{t} e^{r_2 (t-\tau)} z(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t} e^{r_2 (t-\tau)} \left[\int_0^{\tau} e^{r_1 (t-\eta)} x(\eta) d\eta \right] d\tau \\
&= \int_0^{t} e^{r_2 (t-\tau)} e^{r_1 t} \left[\int_0^{\tau} e^{-r_1 \eta} x(\eta) d\eta \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{r_2(t-\tau)}e^{r_1 t}\left[\int_0^\tau e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta\right] \\ &= e^{r_2 t + r_1 t}\int_0^t e^{-r_2\tau}\int_0^\tau e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta \end{aligned}$$

Integramos por partes:

$$v'(\tau) = e^{-r_2\tau} \quad \to \quad v(\tau) = \frac{-1}{r_2}e^{-r_2\tau}$$

$$u(\tau) = \int_0^\tau e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta \quad \to \quad u'(\tau) = e^{-r_1\tau}x(\tau)$$

$$y(t) \;=\; e^{r_2 t + r_1 t}\left[\left[\frac{-1}{r_2}e^{-r_2\tau}\int_0^\tau e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta\right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{r_2}\int_0^t e^{(-r_2-r_1)\tau}x(\tau)d\tau\right.$$

Evaluemos el primer término entre paréntesis

$$\begin{aligned}
\left[\frac{-1}{r_2}e^{-r_2\tau}\int_0^{\tau} e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta\right]_{\tau=0}^{\tau=t} &= \frac{-1}{r_2}e^{-r_2 t}\int_0^{t} e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta \\
&\quad -\frac{-1}{r_2}e^{-r_2 0}\int_0^{0} e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta \\
&= \frac{-1}{r_2}e^{-r_2 t}\int_0^{t} e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{(r_2+r_1)t}\left[\frac{-1}{r_2}e^{-r_2 t}\int_0^{t} e^{-r_1\eta}x(\eta)d\eta - \int_0^{t}\frac{-1}{r_2}e^{-r_2\tau}e^{-r_1\tau}d\tau\right] \\
&= \frac{-1}{r_2}\int_0^{t} e^{r_1(t-\eta)}x(\eta)d\eta + \frac{1}{r_2}\int_0^{t} e^{r_1(t-\tau)}e^{r_2(t-\tau)}x(\tau)d\tau \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$(D - r_1)(D - r_2)y(t) = (D - r_2)(D - r_1)y(t)$$

por lo que pudimos haber comenzado con $z(t) = (D - r_1)y(t)$ y resolver $(D - r_2)z(t) = x(t)$ de la misma forma

La solución en dicho caso habria sido exactamente la misma, pero r_1 ocuparía el lugar de r_2 y viceversa.

Por lo tanto:

$$y(t) = \frac{-1}{r_1}\int_0^t e^{r_2(t-\eta)}x(\eta)d\eta + \frac{1}{r_1}\int_0^t e^{r_2(t-\tau)}e^{r_1(t-\tau)}x(\tau)d\tau \quad (2)$$

Si multiplicamos (1) por $-r_2$ y (2) por r_1 tenemos

$$
\begin{aligned}
-r_2y(t) + r_1y(t) &= \int_0^t e^{r_1(t-\eta)}x(\eta)d\eta - \int_0^t e^{r_1(t-\tau)}e^{r_2(t-\tau)}x(\tau)d\tau \\
&\quad - \int_0^t e^{r_2(t-\eta)}x(\eta)d\eta + \int_0^t e^{r_2(t-\tau)}e^{r_1(t-\tau)}x(\tau)d\tau \\
(r_1 - r_2)y(t) &= \int_0^t e^{r_1(t-\eta)}x(\eta)d\eta - \int_0^t e^{r_2(t-\eta)}x(\eta)d\eta
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución para esta EDO de segundo orden es:

$$
\boxed{y(t) = \frac{1}{r_1 - r_2}\int_0^t e^{r_1(t-\eta)}x(\eta)d\eta + \frac{-1}{r_1 - r_2}\int_0^t e^{r_2(t-\eta)}x(\eta)d\eta}
$$

Entonces, la respuesta a entrada impulso para un sistema modelado por una EDO de segundo orden es:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} u(t) + \frac{-1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} u(t)}$$

Recordar: Hemos asumido que $r_1 \neq r_2$.

Para el caso cuando $\boldsymbol{r_1 = r_2 = r}$, tenemos que

$$(D - r_1)(D - r_2) = (D - r)(D - r) = (D - r)^2$$

por lo que la EDO es

$$(D - r)^2 y(t) = x(t)\ .$$

Similarmente separamos en dos EDOs de primer orden

$$(D - r)y(t) = z(t)$$
$$(D - r)z(t) = x(t)$$

La solución a la segunda EDO es

$$z(t) = \int_0^t e^{r(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

la que al reemplazarla en la primera EDO obtengo

$$\begin{aligned}
(D-r)y(t) &= z(t) = \int_0^t e^{r(t-\tau)} x(\tau) d\tau \\
y'(t) - ry(t) &= \int_0^t e^{r(t-\tau)} x(\tau) d\tau \\
e^{-rt}[y'(t) - ry(t)] &= e^{-rt} \int_0^t e^{r(t-\tau)} x(\tau) d\tau \\
e^{-rt} y(t) &= \int_0^t \int_0^\tau e^{-r\eta} x(\eta) d\eta dt
\end{aligned}$$

Integrando por partes con

$$\begin{aligned} v'(\tau) = 1 \quad &\rightarrow \quad v(\tau) = \tau \\ u(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-r\eta} x(\eta) d\eta \quad &\rightarrow \quad u'(\tau) = e^{-r\tau} x(\tau) \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-rt} y(t) &= \left[\tau \int_0^{\tau} e^{-r\eta} x(\eta) d\eta\right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \tau e^{-r\tau} x(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t [t-\tau] e^{-r\tau} x(\tau) d\tau \\ \therefore y(t) &= \int_0^t [t-\tau] e^{r(t-\tau)} x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Obtenemos $h(t)$ reemplazando x por δ. Entonces la respuesta a entrada impulso para un sistema descrito por una EDO de segundo orden con raices iguales $(r_1 = r_2 = r)$ es:

$$\boxed{h(t) = te^{rt}u(t)}$$

En resumen, para un sistema descrito por la EDOCC $y''(t) + ay'(t) + by(t) = x(t)$ encontramos $h(\cdot)$ mediante

1. Encontrar las raices del polinomio $D^2 + aD + b = 0$. Llamarlas r_1 y r_2.

2. Si $r_1 = r_2$, entonces
$$h(t) = te^{rt}u(t)$$

3. Si $r_1 \neq r_2$, entonces expresar el inverso del polinomio por fracciones parciales:
$$\frac{1}{D^2 + aD + b} = \frac{k_1}{D - r_1} + \frac{k_2}{D - r_2} \ ,$$
entonces
$$h(t) = k_1 e^{r_1 t}u(t) + k_2 e^{r_2 t}u(t)$$

Solución de EDOCC

En general, resolvemos una EDOCC separando la salida en dos:

1. **Respuesta natural** del sistema, que es aquella cuando la entrada es cero ($x(t) = 0$). La salida asociada se denota por y_N y existe por las posibles condiciones iniciales presentes en el sistema.

2. **Respuesta forzada** del sistema, que es aquella cuando la entrada no es cero pero las condiciones iniciales son cero. La salida forzada la denotamos por y_F y existe solamente por la entrada al sistema, x.

En la literatura, la respuesta natural se conoce también como respuesta a entrada cero y la respuesta forzada como respuesta a estado cero.

Dado que un sistema descrito por una EDOCC es in sistema L.I.T. entonces la suma de la entrada x y la entrada cero genera la suma de las salidas asociadas: y_F y y_N, respectivamente.

Entonces, si $y(t) = y_N(t) + y_F(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= x(t) \\ (y_N(t) + y_F(t))'' + a\,(y_N(t) + y_F(t))' + b\,(y_N(t) + y_F(t)) &= x(t) \\ \big(y_N''(t) + ay_N'(t) + by_N(t)\big) + \big(y_F''(t) + ay_F'(t) + by_F(t)\big) &= x(t) \end{aligned}$$

Dado que especificamos $y_F''(t) + ay_F'(t) + by_F(t) = x(t)$, entonces $y_N''(t) + ay_N'(t) + by_N(t) = 0$.

Observaciones:

1. La respuesta natural y_N se obtiene resolviendo la ecuación homogenea (y_N se conoce como solución homogenea).

2. La respuesta forzada y_F se determina usando x y fijando las condiciones inciales (C.I.) a cero.

3. Las soluciones encontradas anteriormente para EDOCC de primer y segundo orden fueron obtenidas precisamente con C.I. cero!

4. Por lo tanto, solo nos resta obtener la respuesta natural para describir completamente un sistema descrito por EDOCC de primer y segundo orden.

Respuesta natural sistema de primer orden

Obtenemos la respuesta natural de un sistema de primer orden mediante un ejemplo.

Ejemplo: Circuito RC en serie con entrada de voltaje $x(t)$ y con salida el voltaje en el condensador, $y(t)$. El voltaje en el condensador es Y_0 para $t = 0$.

Aplicando la LVF tenemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ &= Ri(t) + y(t) \\ &= RCy'(t) + y(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto la EDOCC que describe el circuito es

$$y' + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

con $y(0) = Y_0$

Respuesta natural: EDO homogenea

$$y' + \frac{1}{RC}y(t) = 0$$

que tiene por solución $y(t) = Ae^{-t/RC}$. Para encontrar la solución general, usamos variación de parámetros: Proponemos solución de la forma $y(t) = A(t)e^{-t/RC}$. Reemplazando en la EDO

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{RC}y(t) &= \frac{1}{RC}x(t) \\
\left(A(t)e^{-t/RC}\right)' + \frac{1}{RC}\left(A(t)e^{-t/RC}\right) &= \frac{1}{RC}x(t) \\
A'(t)e^{-t/RC} - \frac{A(t)}{RC}e^{-t/RC} + \frac{A(t)}{RC}e^{-t/RC} &= \frac{1}{RC}x(t) \\
A'(t)e^{-t/RC} &= \frac{1}{RC}x(t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A'(t) = \frac{1}{RC} x(t) e^{t/RC} \; .$$

Resolvemos calculando la integral a ambos lados

$$A(t) = \int_0^t A'(\tau) d\tau + A(0) = \int_0^t \frac{1}{RC} x(\tau) e^{\tau/RC} d\tau + A(0)$$

en donde $A(0)$ es determinado por la condición inicial.

Entonces, la solución para la EDO de primer orden es

$$\begin{aligned} y(t) = A(t) e^{-t/RC} &= \left[\int_0^t \frac{1}{RC} x(\tau) e^{\tau/RC} d\tau + A(0) \right] e^{-t/RC} \\ &= \int_0^t \frac{1}{RC} x(\tau) e^{\frac{-1}{RC}(t-\tau)} d\tau + A(0) e^{-t/RC} \; . \end{aligned}$$

Es simple notar que $A(0) = Y_0$.

En donde identificamos el primer término:

$$y_F(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} x(\tau) e^{\frac{-1}{RC}(t-\tau)} d\tau$$

como la solución general que ya sabiamos para un sistema descrito por la EDO $y' + ay = x$ con condiciones iniciales cero!

Por otra parte, el segundo término

$$y_N(t) = Y_0 e^{-t/RC}$$

es exactamente la solución asociada a la ecuación homogenea.

Respuesta natural sistema orden N

En general, para un sistema de orden N, la respuesta natural es la solución a la EDO homogenea

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) = 0$$

La solución de esta EDO siempre toma la forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t} \ ,$$

en donde r_i son las raices del polinomio característico y c_i son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

Respuesta natural sistema de segundo orden

Veamos el caso de un circuito RLC en serie, con voltaje de entrada $x(t)$ y como salida $y(t)$ el voltaje en el condensador.

Por ser un circuito en serie la corriente $i(t)$ es la misma para todos los componentes. Por lo tanto tenemos las relaciones $i(t) = Cy'(t)$ y $v_L(t) = Li'(t) = L(Cy'(t))' = LCy''(t)$. Ahora, aplicando la LVK:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ &= RCy'(t) + LCy''(t) + y(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto la EDOCC para este sistema es

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}x(t)$$

La EDO homogenea es

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = 0 \ ,$$

la que tendrá solución de la forma $y(t) = ce^{rt}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) &= 0 \\ cr^2e^{rt} + \frac{R}{L}cre^{rt} + \frac{1}{LC}ce^{rt} &= 0 \\ ce^{rt}\left(r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC}\right) &= 0 \end{aligned}$$

En donde identificamos que la cantidad entre paréntesis es el mismo polinomio característico que ya hemos descrito anteriormente!

Recordemos que para $y'' + ay' + by = x$ las raices del polinomio $r^2 + ar + b$ las llamamos r_1 y r_2.

En general, las soluciones de este polinomio son

$$r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

e identificamos los siguientes posibles casos:

Caso 1: Raices reales y distintas, lo que se da cuando $a^2 > 4b$

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Que tiene por solución

$$y_N(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

- Las constantes de tiempo r_1 y r_2 dependen de los parámetros del sistema, a y b.
- Los coeficientes c_1 y c_2 dependen (linealmente) de las condiciones inciales $y(0)$ y $y'(0)$
- El signo de r_1 y r_2 determina si la solución decae ($r_i < 0$) o crece ($r_i > 0$) para $t \to \infty$
- La magnitud de r_1 y r_2 determina la tasa de crecimiento o de decaimiento

Por ejemplo, si el circuito tiene $R = 3$ y $L = C = 1$ con voltaje en C de 1V para $t = 0$ y corriente cero para el mismo instante, entonces

$$a = \frac{R}{L} = 3 \quad , \quad b = \frac{1}{LC} = 1 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \ ,$$

entonces $\sqrt{a^2 - 4b} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ y, por ende, las raices son

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -2.62 \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.38 \ .$$

La solución tiene la forma $y_N(t) = c_1 e^{-2.62t} + c_2 e^{-0.38t}$. Aplicando las condiciones iniciales obtenemos que

$$y_N(t) = -0.17 e^{-2.62t} + 1.17 e^{-0.38t}$$

Caso 2: Raices reales e iguales, lo que ocurre cuando $a^2 = 4b$

- En este caso, las raices son

$$r_1 = r_2 = r = \frac{-a}{2}$$

- La solución tiene la forma

$$y_N(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

- Si, para nuestro circuito de ejemplo $R = 2$ y $L = C = 1$ entonces $a^2 = 4$ y $4b = 4$, por lo tanto tenemos raices reales e iguales: $r_1 = r_2 = \frac{-a}{2} = -1$. Aplicando condiciones iniciales se obtiene que $y_N(t) = te{-}t$

Caso 3: Raices distintas y complejas, lo que ocurre cuando $a^2 < 4b$.

Para este caso $a^2 - 4b < 0$

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ &= \frac{-a \pm \sqrt{(-1)(4b - a^2)}}{2} \\ &= \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{4b - a^2}}{2} \\ &= \frac{-a}{2} \pm j\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto las raices son los números complejos

$$r_1 = \sigma + j\omega \qquad r_2 = \sigma - j\omega$$

con $\sigma = \frac{-a}{2}$ y $\omega = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$

Números complejos

El conjunto de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \left\{ z \mid z = x + jy,\ x, y \in \mathbb{R},\ j^2 = -1 \right\}$$

En términos más simples...
Un número complejo es definido como

$$z = x + jy$$

en donde x e y son números reales y $j^2 = -1$ es el número imaginario "puro".

Algunas definiciones:

- La **parte real** de z, denotada por $\Re\{z\}$, es x
- La **parte imaginaria** de z, denotada por $\Im\{z\}$, es y
- El **complejo conjugado** de z se denota como z^* y es definido como

$$z^* = x - jy$$

- El **módulo** de z se define como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Los números complejos también pueden ser representados como un punto en el plano Cartesiano mediante

$$z = x + jy$$

el que se interpreta como un punto (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares

- En coordenadas polares

$$z = re^{j\theta}$$

en donde r es el módulo de z y θ es el ángulo entre el vector z y el eje real, es decir:

$$\theta = \arctan\left[\frac{y}{x}\right]$$

- La relación de Euler es

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

si reemplazamos por $-\theta$ tenemos

$$\begin{aligned} e^{-j\theta} &= \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) \\ &= \cos\theta - j\sin\theta \\ &= \left(e^{-j\theta}\right)^* \end{aligned}$$

por lo tanto, el complejo conjugado en coordenadas polares es

$$z^* = re^{-j\theta}$$

Tambien se pueden obter las siguientes relaciones entre coordenadas Cartesianas y polares

Cartesianas a polares

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left[\frac{y}{x}\right] \end{aligned}$$

Polares a Cartesianas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Retomando el Caso 3...

Para este caso, las raices cumplen la propiedad $r_1 = r_2^*$ por lo que podemos decir que la solución tiene la forma

$$y_N(t) = ce^{rt} + c^* e^{r^* t}$$

Se observan los siguientes puntos

- Recordar que $r = \sigma + j\omega$ por lo tanto la exponencial es

$$e^{rt} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

- Por Euler: $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$
- Dado que $c \in \mathbb{C}$ entonces $c = \Re\{c\} + j\Im\{c\}$

Por lo tanto, para la solución del caso 3 las siguientes representaciones son equivalentes

$$\begin{aligned}
y_N(t) &= ce^{rt} + c^* e^{r^* t} \\
&= e^{\sigma t}\left(ce^{j\omega t} + c^* e^{-j\omega t}\right) \\
&= e^{\sigma t}\left(c[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)] + c^*[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)]\right) \\
&= 2e^{\sigma t}\left(\Re\{c\}\cos\omega t - \Im\{c\}\sin\omega t\right) \\
&= Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

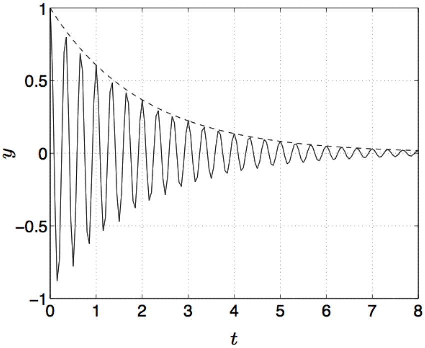
en donde

$$\begin{aligned}
A &= 2|c| \\
\phi &= \arctan\left[\frac{\Im\{c\}}{\Re\{c\}}\right]
\end{aligned}$$

Observamos los siguientes puntos

- Si $\sigma > 0$ entonces la solución es una sinusoidal que crece exponencialmente
- Si $\sigma < 0$ entonces la solución es una sinusoidal que decae exponencialmente
- Si $\sigma = 0$ entonces la solución es una sinusoidal pura
- $\Re\{r\} = \sigma$ es la tasa de decaimiento o crecimiento, según corresponda
- $\Im\{r\} = \omega$ es la frecuencia de oscilación de la sinusoidal
- Dado que c está determinado por las condiciones iniciales, la amplitud de la sinusoidal, A, y la fase, ϕ, están determinados también por las condiciones iniciales
- La cantidad $Ae^{\sigma t}$ se conoce como la envolvente de $y_N(t)$

Ejemplo:



Donde aparece σ y ω acá?

- El periodo de oscilación es $2\pi/\omega$
- La envolvente decae exponencialmente con una constante de tiempo $-1/\sigma$

- La envolvente es igual a $|y|$ cuando la sinusoide vale ± 1
- Si $\sigma < 0$ la envolvente decae en $1/e$ en $1/\sigma$ segundos
- Si $\sigma > 0$ la envolvente dobla su valor cada $0.693/\sigma$ segundos

Oscilador armónico

Un sistema caracterizado por una EDOCC de la forma

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

se conoce como **oscilador armónico**.

El polinomio característico es $r^2 + \omega^2 = 0$, por lo que las raices son puramente complejas: $r = \pm j\omega$, por ende la solución es

$$y_N(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

en donde A y ϕ dependen de las condiciones iniciales.

El circuito LC con entrada cero y corriente $i(t)$ y como salida e voltaje en el condensador. Asumiendo $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$...

LVK: $v_L(t) + v_C(t) = 0$. Aplicando las relaciones que hemos visto la EDO que describe al sistema es

$$y''(t) + \frac{1}{LC}y(t) = 0$$

por lo que la solución es $y_N(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ con frecuencia de oscilación

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y $A = 1/\cos\phi$ y $\sin\phi = 0$ por lo que

$$y_N(t) = \cos(\omega t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Otra metodología para encontrar la solución forzada...

Una técnica simple para encontrar la solución para la ecuación no-homogenea es testear una combinación lineal de x o de su primera y/o segunda derivada.

Por ejemplo

- Si $x(t) = 3t - 6^2$, entonces tratamos de encontrar los valores de c_0, c_1 y c_2 tal que $y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ es una solución.
- Si $x(t) = 2\sin t + \cos t$, entonces tratamos de encontrar las constantes c_1 y c_2 tal que $y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ es una solución.
- Si $x(t) = 2e^{\alpha t}$, entonces buscamos el valor de c tal que $y(t) = ce^{\alpha t}$ es una solución.

Ejemplo: Encontrar la solución para la EDO

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^2$$

con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

(1) Solución homogenea sabemos que tendrá la forma $y_N(t) = c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_1 t}$, en donde r_1 y r_2 son las soluciones del polinomio $r^2 + r - 2 = 0$. Encontramos que $r_1 = -2$ y $r_2 = 1$, por lo que

$$y_N(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \ .$$

Por las condiciones iniciales tenemos que $c_1 + c_2 = 1$ y que $-2c_1 + c_2 = 0$ por lo que $c_1 = \frac{1}{3}$ y $c_2 = \frac{2}{3}$ y

$$y_N(t) = \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^{t} \ .$$

(2) Solución forzada la encontramos suponiendo que

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \ .$$

Por lo que $y'(t) = c_1 + 2c_2 t$ y $y''(t) = 2c_2$. Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= t^2 \\ 2c_2 + c_1 + 2c_2 t - 2(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) &= t^2 \\ (2c_2 + c_1 - 2c_0) + (2c_2 - 2c_1)t - 2c_2 t^2 &= t^2 \ . \end{aligned}$$

Comparando término a término de los polinomios tenemos que cumplir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 2c_2 + c_1 - 2c_0 &= 0 \\ 2c_2 - 2c_1 &= 0 \\ -2c_2 &= 1 \end{aligned}$$

De donde encontramos que $c_0 = \frac{-3}{4}$, $c_1 = c_2 = \frac{-1}{2}$, por lo que la solución forzada es

$$y_F(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} \ .$$

Consecuentemente, la solución de la EDO es

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t} - \frac{3}{4} - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}$$

Propiedades de los sistemas y su respuesta impulso

Queremos ver cómo las propiedades de los sistemas tales como

1. Sin memoria
2. Invertibilidad
3. Causalidad
4. Estabilidad

se reflejan en la respuesta a entrada impulso, $h(\cdot)$ y viceversa.

Sistemas sin memoria

Un sistema sin memoria es aquel que la salida solo depende de la entrada en el instante t

Teorema: Un sistema L.I.T. no tiene memoria si y solo si su respuesta a entrada impulso es

$$h(t) = a\delta(t)$$

Proof: Si $h(t) = a\delta(t)$ entonces la salida (determinada por la convulución por ser S.L.I.T.) es

$$\begin{aligned} y(t) = (x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)a\delta(t-\tau)\ d\tau \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\ d\tau \\ &= ax(t) \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema no tiene memoria.

Por lo tanto $h(t) = a\delta(t) \Rightarrow$ Sistema sin memoria

A la inversa, si el sistema no tiene memoria, entonces $y(t)$ no puede depender de $x(\tau)$ para valores $\tau \neq t$. Entonces, en la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

tenemos que forzar el término $h(t-\tau) = 0$ para todo $t \neq \tau$. Equivalentemente

$$h(t) = 0 \quad , \quad \forall t \neq 0$$

y consecuentemente $h(t) \neq 0$ para $t = 0$.

Esto implica que debemos tener $h(t) = h(0)\delta(t) = a\delta(t)$ en donde a es el valor que se requiera para $h(0)$.

Por lo tanto un sistema sin memoria $\Rightarrow h(t) = a\delta(t)$ $\square$

Sistema invertible

Un sistema es invertible si para cada par de entradas diferentes $x_1 \neq x_2$ las salidas asociadas $y_1 \neq y_2$. Esto quiere decir que el mapeo T que define el sistema mediante $y = T(x)$ es inyectivo (mapeo uno-a-uno).

Teorema: Un sistema L.I.T. es invertible si y solo si existe una función $g(t)$ tal que

$$h(t) * g(t) = \delta(t)$$

Proof: Primero, recordemos que $\delta(t) * x(t) = x(t)$. Ahora, si T es invertible, entonces existe un mapeo T tal que

$$y(t) = T(x(t)) = h(t) * x(t) \ .$$

Como T es inyectivo, entonces existe un mapeo inverso, T^{-1} tal que

$$T^{-1}\left(T(x(t))\right) = x(t) \ \ \forall x \ .$$

Por lo tanto, existe una función g tal que

$$\begin{aligned} g(t) * (T(x(t))) &= x(t) \\ g(t) * (h(t) * x(t)) &= x(t) \\ (g(t) * h(t)) * x(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(t) * h(t) = \delta(t)$.

Por lo tanto, T invertible $\Rightarrow g(t) * h(t) = \delta(t)$.

Inversamente, asumamos que existe g tal que $g(t) * h(t) = \delta(t)$. Dos entradas x_1 y x_2, con $x_1 \neq x_2$, tienen salidas $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$ y $y_2(t) = h(t) * x_2(t)$, respectivamente.

Calculando la diferencia

$$y_1(t) - y_2(t) = h(t) * x_1(t) - h(t) * x_2(t) = h(t) * (x_1(t) - x_2(t)) \ .$$

Tomando la convolución con g

$$\begin{aligned} g(t) * (y_1(t) - y_2(t)) &= g(t) * h(t) * (x_1(t) - x_2(t)) \\ &= \delta(t) * (x_1(t) - x_2(t)) \\ &= x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

Entonces, como $x_1 \neq x_2$ y además $g \neq 0$, entonces necesariamente $y_1(t) - y_2(t) \neq 0$, o equivalentemente $y_1(t) \neq y_2(t)$.

Por lo tanto $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t)$, es decir el sistema es invertible si existe g con la propiedad especificada.

Por lo tanto si existe g tal que $g(t) * h(t) = \delta(t) \Rightarrow$ Sistema invertible. $\square$

Sistema causal

Un sistema es causal si la salida en el instante t no depende de $x(\tau)$ con $\tau > t$ (es decir, solo depende de valores pasados).

Teorema: Un sistema L.I.T. es causal si y solo si

$$h(t) = 0 \quad , \quad \forall t < 0$$

Proof: La salida del sistema es

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

en donde identificamos que el primer término contiene todos los $x(\tau)$ con $\tau < t$ y el segundo para $\tau > t$. Si el sistema es causal, entonces debemos forzar

$$h(t-\tau) = 0 \quad , \quad \tau > t$$

Si $u = t - \tau$, entonces debemos forzar $h(u) = 0$ para $u < 0$. Dado que u es una variable real cualquiera entonces esto es equivalente a $h(t) = 0$ $\forall t < 0$.

Por lo tanto si el sistema es causal $\Rightarrow h(t) = 0$, $\forall t < 0$.

Inversamente, si $h(t) = 0$, $\forall t < 0$ la salida del sistema es

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} x(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto la salida en t depende de la entrada en el intervalo $0 < t - \tau < \infty$. Es decir depende de $x(\tau)$ tal que $\tau < t$. Es decir, no depende solo de los valores pasados del tiempo, por ende el sistema es causal.

Por lo tanto si $h(t) = 0$, $\forall t < 0 \Rightarrow$ el sistema es causal. $\square$

Sistema estable

Un sistema es estable si la salida es acotada para una entrada acotada

Teorema: Un sistema L.I.T. es estable si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

Proof: Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$; entonces para una entrada acotada $|x(t)| < B$ tenemos

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) h(t-\tau)|\, d\tau \ ^{1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\, |h(t-\tau)|\, d\tau \\ &\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\, d\tau \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema es estable, vale decir $|y(t)| < \infty$.

[1] Notar el uso de la desigualdad de Hölder

Ahora supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \infty$. Queremos demostrar que y no está acotada.

Para eso definimos la señal

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 & , h(-t) > 0 \\ -1 & , h(-t) < 0 \end{array} \right. = \mathsf{sgn}[h(-t)] \ .$$

Claramente x está acotada, $|x(t)| \leq 1 \ \forall t$. La salida en $t = 0$ es

$$\begin{aligned} |y(0)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(0-\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)| d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema resulta inestable. □

Ejemplo: Ecuaciones de diferencias

- Considere que tiene un depósito por y_0 pesos y que el banco le bonifica cada año un porcentaje r del monto que tenia el año anterior.
- Si denotamos por n la variable de tiempo (es decir el año actual es n) y como $y[n]$ la cantidad del dinero en dicho año, entonces este año Ud. tendrá

$$y[n] = y[n-1] + ry[n-1] = (1+r)y[n-1]$$

  pesos.
- Si además Ud. deposita/retira cada año n una cantidad $x[n]$ de pesos, su ahorro en dicho año n es

$$y[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$$

  en donde el signo de x determinará si se depositó o retiró dinero.

La ecuación que obtuvimos en el ejemplo describe un sistema discreto de salida y (su ahorro en el banco) y entrada x (sus depósitos anuales).

Si depositamos nada ($x = 0$) el dinero cada año sería

$$
\begin{aligned}
y[0] &= y_0 \\
y[1] &= (1+r)y[0] = (1+r)y_0 = (1+r)y_0 \\
y[2] &= (1+r)y[1] = (1+r)(1+r)y_0 = (1+r)^2 y_0 \\
y[3] &= (1+r)y[2] = (1+r)(1+r)^2 y_0 = (1+r)^3 y_0 \\
&\vdots \\
y[n] &= (1+r)^n y_0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, cuando no hay entrada ($x = 0$) entonces la ecuación la podemos resolver recursivamente mientras **sepamos la condición inicial**, y_0 en este ejemplo.

- Suponga que su banco además le ofrece una bonificación adicional de r por monto ahorrado con ellos hace 5 años. Entonces su ahorro en el año actual seria descrito por la ecuación

$$y[n] = (1 + r)y[n - 1] + ry[n - 5] + x[n]$$

- Podriamos definir $a_1 = -(1 + r)$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ y $a_5 = -r$ y escribir la ecuación del sistema como

$$y[n] + \sum_{i=1}^{5} a_i y[n - i] = x[n]$$

La estructura de la relación entrada-salida de este sistema discreto (descrito por la ecuación que se obtuvo) se conoce como una **ecuación de diferencias**.

Ecuaciones de diferencias lineales

Una gran variedad de **sistemas en tiempo discreto** pueden ser descritos por **ecuaciones de diferencias lineales**:

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i]$$

en donde los coeficientes $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{M}$ no dependen del tiempo n.

De igual forma que para las ecuaciones diferenciales, necesitamos las **condiciones iniciales:** $y[-1]$, $y[-2]$, $\ldots$, $y[-N]$.

Una ecuación de diferencias lineal (EDL) se puede resolver de manera análoga a las ecuaciones diferenciales.

En concreto, la solución $y[n]$ puede escribirse como la suma de la salida natural, $y_N[n]$, que es la solución de la ecuación homogenea

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] = 0 \ ,$$

y la solución forzada $y_F[n]$ asociada a la entrada $x[n]$.

Dado que las condiciones iniciales conducen a diferentes combinaciones entrada-salida, nos enfocaremos en la condición de reposo inicial, es decir, si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ también para $n < n_0$. Con reposo inicial, el sistema descrito por una EDL es LTI y causal.

Ecuaciones de diferencias lineales

Sistemas discretos descritos por ecuaciones de diferencias con reposo inicial son:

1. **Lineales e invariantes en el tiempo** (facil de verificar por inspección)

2. **Causales:** La salida en el instante n depende de la salidas pasadas $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\ldots$, $y[n-N]$ y de las entradas pasadas $x[n]$, $x[n-1]$, $\ldots$, $x[n-M]$.

La EDL se puede reescribir mediante

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i]$$

que se conoce como **ecuación recursiva** ya que especifica un procedimiento recursivo para determinar la salida en términos de la entrada y de las salidas previas.

Acá resulta evidente que requerimos conocer $x[\cdot]$ para todo n y las salidas previas $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\dots$, $y[n-N]$

Si $N = 0$ entonces la EDL se reduce a

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i]$$

La que es una función explicita de los valores presented y previous de la entrada. Esta ecuación se conoce como **ecuación no recursiva** ya que no se usa recursivamente las salidas previas. Por lo mismo, para este caso **no se necesitan** condiciones iniciales sobre $y[\cdot]$.

Por cálculo directo sobre esta ecuación encontramos la respuesta impulso del sistema discreto

$$h[n] = \begin{cases} b_n & , 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ecuaciones de diferencias de primer orden

Una ecuación de diferencias lineales (EDL) de primer orden puede tener la forma

$$y[n] = ay[n-1] + b_n$$

en donde a es una constant y b_1, b_2, $\ldots$, es una secuencia de constantes (posiblemente diferentes para cada n).

Proposición 1: La solución para esta EDL tiene la forma

$$y[n] = a^n y[0] + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_k$$

en donde $y[0]$ es la condición inicial.

Proof: Dada la condición inicial $y[0]$ tenemos para $n = 1$, $y[1] = ay[0] + b_1$. Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} y[2] &= ay[1] + b_2 = a\left(ay[0] + b_1\right) + b_2 \\ &= a^2 y[0] + ab_1 + b_2 \ . \end{aligned}$$

Similarmente para $n = 3$:

$$\begin{aligned} y[3] &= ay[2] + b_3 \\ &= a\left(a^2 y[0] + ab_1 + b_2\right) + b_3 \\ &= a^3 y[0] + a^2 b_1 + ab_2 + b_3 \ . \end{aligned}$$

Generalizando tenemos:

$$\begin{aligned} y[n] &= a^n y[0] + a^{n-1}b_1 + a^{n-2}b_2 + \cdots + ab_{n-1} + b_n \\ &= a^n y[0] + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_k \ . \ \square \end{aligned}$$

Proposición 2: La solución para la EDL con $b_k = b$, para $\forall k = 0, 1, \ldots$ tiene la forma

$$y[n] = a^n \left(y[0] - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \ , \quad a \neq 1$$

en donde $y[0]$ es la condición inicial.

Proof: Conocida la solución anterior:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= a^n y[0] + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_k \\
&= a^n y[0] + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b \\
&= a^n y[0] + b \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \\
&= a^n y[0] + b \sum_{k=0}^{n-1} a^{k} \\
&= a^n y[0] + b \left(\frac{1-a^n}{1-a} \right) \ , \quad a \neq 1 \ . \square
\end{aligned}
$$

De la solución

$$y[n] = a^n \left(y[0] - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \ , \quad a \neq 1$$

notamos que solamente el primer término cambia con n. Por lo tanto, si $y[0] = b/(1-a)$, entonces $y[n] = b/(1-a) =$ constante!

Esto se conoce como el **punto de equilibrio** de la EDL. Denotamos este punto por

$$y^* = \frac{b}{1-a}$$

Por lo tanto podemos denotar la solución mediante

$$y[n] = a^n \left(y[0] - y^* \right) + y^*$$

El **comportamiento cualitativo** de la solución presentada depende directamente el valor de la constante a.

- $|a| < 1$
  - $y[n]$ converge a y^*
  - La solución es estable.
  - Tenemos dos posibles "sub-casos":
    - $0 < a < 1$: Convergencia monotónica
    - $-1 < a < 0$: Oscilaciones amortiguadas

- $|a| > 1$
  - Divergencia
  - También tenemos dos casos
    - $a > 1$: Explosión
    - $a < -1$: Oscilaciones explosivas

De la solución que encontramos para la EDL

$$y[n] = a^n y[0] + \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b_k$$

notamos que si $b_k = 0$, $\forall k$, entonces la solución solo depende de la parte variable en el tiempo:

$$y[n] = a^n y[0]$$

A continuación veremos un ejemplo que utiliza este resultado para obtener la respuesta a entrada impulso.

Ejemplo: Calculemos la solución para la EDL con condición de reposo y entrada impulso, $x[n] = K\delta[n]$,

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

Solución: Dado que la entrada es $x[n] = k\delta[n]$, entonces notamos que $x[n] = 0$, $\forall n < -1$. Como tenemos condición de reposo entonces sabemos que $y[n] = 0 \; \forall n < -1$. Así, la condición inicial para el sistema es $y[-1] = 0$.

Resolvemos recursivamente el sistema

$$\begin{aligned} y[-1] &= 0 \\ y[0] &= x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K \\ y[1] &= x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y[2] &= x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K \\
y[3] &= x[3] + \frac{1}{2}y[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 K \\
&\vdots \\
y[n] &= x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K
\end{aligned}$$

Haciendo $K = 1$ $x[n] = \delta[n]$, por lo que la respuesta a entrada impulso para el sistema en este ejemplo es

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Solución de EDLs

Para resolver las EDL consideramos dos alternativas

Método 1: Método de la perspectiva de los sistemas:

1. Encontrar la respuesta natural del sistema $y_N[n]$ haciendo la entrada cero.
2. Encontrar la respuesta forzada $y_F[n]$ primero haciendo las condiciones iniciales cero.

   Recordar que $y_F[n] = h[n] * x[n]$ en donde $h[n]$ es la respuesta a entrada escalón unitario.

   La evaluación de $h[n]$ requiere resolver la ecuación de diferencias con condiciones iniciales cero y entrada impulso[2].
3. La solución total es la suma de ambas soluciones.

[2] Podemos requerir condiciones iniciales "derivadas" para encontrar $h[\cdot]$

Ejemplo: Resolver la EDL

$$y[n] = y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + x[n]$$

con $y[-1] = 1$ y $y[-2] = 0$ en donde $x[n] = u[n]$.

Solución: (Ver Lecture Notes)

$$y_N[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$y_F[n] = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (3+n)$$

$$y[n] = y_N[n] + y_F[n] = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 + \frac{n}{2}\right)$$

Ejemplo: Resolver la EDL

$$y[n] = y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + x[n]$$

con $y[-1] = 1$ y $y[-2] = 0$ en donde $x[n] = u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ (Note que x es diferente!).

Solución: La solución natural es la misma que para el caso anterior, pues sólo ha cambiado la entrada x.

$$y_N[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

La respuesta a entrada impulso es (Ver Lecture Notes)

$$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

Ejercicio: Obtenga $y_F[n]$ mediante el cálculo de la convolución $y_F[n] = h[n] * x[n]$. Comprobar en Matlab/Octave

La respuesta forzada entonces es

$$
\begin{aligned}
y_F[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right) u[n-k] \right] \left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \right) u[k] \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \right] \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \right] \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}(n+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}
$$

Así tenemos:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= y_N[n] + y_F[n] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 4 + (n^2 + 2n - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Ahora veremos el segundo método para resolver EDL.

Solución de EDLs

La segunda alternativa para resolver el sistema sería:

Método 2: Método clásico:

1. Encontrar la solución homogénea $y_H[n]$. No usar las condiciones iniciales en este punto.
2. Encontrar la respuesta particular $y_P[n]$. La que puede ser determinada asumiendo que tiene la misma forma/estructura de $x[n]$. Esta forma se reemplaza en la ecuación de diferencias y la solución (particular or forzada) se determina completamente.
   2.1 Se debe tener especial cuidado si una de las componentes de la entrada tiene la misma forma de una de las componentes de $y_N[n]$.
   2.2 En este caso, se debe multiplicar por n tantas veces como sea necesario para asegurar que ninguna componente de la solución forzada tenga la misma forma de ninguna componente de la solución natural.
3. La solución total es la suma de ambas soluciones.

Ejemplo: Resolver la EDL (usando el método 2)

$$y[n] = y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] + x[n]$$

con $y[-1] = 1$ y $y[-2] = 0$ en donde $x[n] = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$.

Solución: La solución homogénea es

$$y_H[n] = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad .$$

No evaluamos A_1 y A_2 en este punto.

Dado que las componentes de $x[n]$, especificamente $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, tiene la misma forma que una de las componentes de y_H entonces debemos multiplicar la forma de y_P repetidamente hasta que no tengan la misma forma.

Por lo tanto, la solución particular tiene la forma

$$y_P[n] = A_3 + A_4 n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \ ,$$

en donde el término A_3 corresponde al término 1 en x y $A_4 n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ corresponde al término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ en x.

Reemplazamos y_P en la EDL:

$$
\begin{aligned}
y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] &= x[n] \\
\left[A_3 + A_4 n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] & \\
-\left[A_3 + A_4 (n-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] & \\
+\frac{1}{4}\left[A_3 + A_4 (n-2)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
\frac{A_3}{4} + 2A_4 \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

De donde claramente $A_3 = 4$ y $A_4 = \frac{1}{2}$

Así

$$y_P[n] = 4 + \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Entonces

$$y[n] = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 + \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ .$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales $y[-1] = 1$ y $y[-2] = 0$.

Para $y[-1] = 1$:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + A_2(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 4 + \frac{(-1)^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} &= 1 \\ 2A_1 - 2A_2 + 4 + \frac{1}{2}2 &= 1 \\ 2A_1 - 2A_2 &= -4 \qquad (4) \end{aligned}$$

Para $y[-2] = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + A_2(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 4 + \frac{(-2)^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} &= 0 \\ 4A_1 - 8A_2 + 4 + \frac{4}{2}4 &= 1 \\ 4A_1 - 8A_2 &= -12 \qquad (5) \end{aligned}$$

Resolvemos (4) y (5) para obtener $A_1 = -1$ y $A_2 = 1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y[n] &= (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + (1)n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 + \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{n^2}{2} + n - 1\right) \\ &= 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{n^2 + 2n - 2}{2}\right) \\ &= 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(n^2 + 2n - 2\right) \end{aligned}$$

Comparando (6) con (3) notamos que es la misma solución!!!

Filtros Autoregresivos de Media Móvil

Sistemas descritos por estas ecuaciones también se les llama **Filtros Autoregresivos de Media Móvil**: Autoregressive Moving-Average (ARMA) filter.

1. **Filtro autoregresivo** de orden N para $b_0 = \cdots = b_M = 0$.

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] = 0 \ , \quad n = 0, 1, \ldots$$

   La salida del sistema en el instante n es una combinación lineal de las N salidas pasadas. Requiere especificar $y[-1]$, …, $y[-N]$.

2. **Filtro del media movil** de orden M para $a_1 = \cdots = a_N = 0$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n-i]$$

   La salida del tiempo n es la combinación lineal de la entrada actual y las M entradas pasadas. No requiere especificar las condiciones iniciales.

Filtros Autoregresivos de Media Móvil

Un filtro **ARMA** es una combinación de estos dos filtros.

En general, la salida de un sistema ARMA para una entrada dada se obtiene de forma **recursiva** usando las condiciones iniciales y alguno de los métodos previamente descritos

En general, para encontrar la salida de un filtro ARMA en el instante n, necesitamos las salidas en los tiempos $n-1$, $n-2$, ..., $n-N$ y las entradas en los tiempos n, $n-1$, ..., $n-M$.

Sistema discreto: El acumulador

Un sistema acumulador se define como aquel sistema que suma todas las entradas anteriores al instante n. En símbolos, la salida es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \; .$$

Veamos como representar este sistema mediante ecuaciones de diferencias. Primero, notemos que la salida para el instante $n-1$ puede ser escrita como

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \; .$$

Ahora, si separamos la salida en n

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1] \; .$$

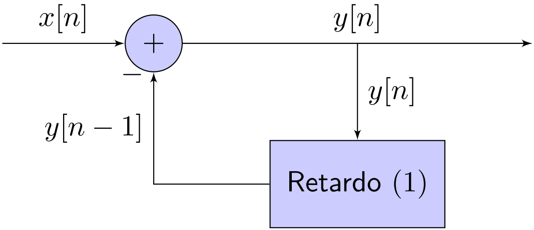
Reordenando los términos tenemos

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \ .$$

Por lo tanto, hemos demonstrado que, además de satisfacer la relación que lo define, el sistema acumulador satisface la ecuación de diferencias dada arriba.

Notemos que la ecuación de diferencias nos da un mejor entendimiento de como se podría implementar el sistema acumulador: Para cada valor de n debemos sumar el valor actual de la entrada, $x[n]$, a la salida anterior del acumulador, $y[n-1]$. Esta interpretación del acumulador se representa mediante la siguiente figura.

Diagrama de bloques para el sistema acumulador. El bloque “Retardo” retarda la entrada en una unidad



Sistema discreto: Filtro de media móvil

El filtro de media móvil (causal) toma el promedio de las las últimas M muestras de la entrada. En símbolos

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} x[n-k] \ .$$

En el instante $n-1$ enemos que

$$y[n-1] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} x[n-1-k]$$

Expandiendo ambas sumatorias y tomando la diferencia notamos que términos intermedios se cancelan, obteniendo

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{M+1}\{x[n] - x[n-M-1]\} \ .$$

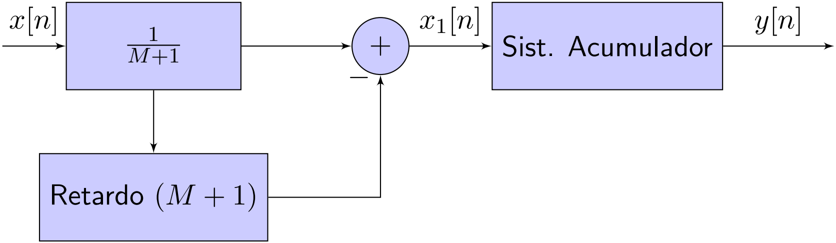
Si definimos

$$x_1[n] = \frac{1}{M+1}\{x[n] - x[n-M-1]\} \ ,$$

entondes el filtro de media movil puede ser expresado por la misma ecuación del acumulador.

$$y[n] - y[n-1] = x_1[n] \ .$$

Diagrama de bloques para el sistema media movil. El primer bloque es conocido como **Atenuador**, pues atenua la señal de entrada.



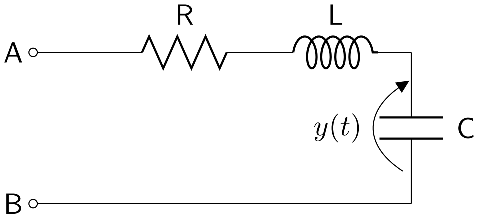
Ecuaciones de estado

La ecuación diferencial corresponde a la representación de un sistema a través de una ecuación diferencial de orden n y sobre una variable (función) de interés.

En control, estas variables de interés se les llama **variable de estado**.

Las **variable de estado** son aquellas variables que definen totalmente la condición del sistema, desde el punto de vista de los objetivos de estudio, en cuanto a la información contenida en éste y a su evolución frente a una acción del medio.

En el caso de las **ecuaciones de estado**, el sistema se representa por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden.
Para ilustrar el concepto de estado de un sistema consideremos el siguiente circuito RLC:



Para este ejemplo identificamos:

- **Entrada:** Voltaje AB, $e_{AB}(t)$.
- **Salida:** Voltaje en el condensador $v_C(t)$
- **Variables de estado:** la corriente del circuito, $i(t)$, y el voltaje en el condensador $v_C(t)$ (que tambien es la salida).

Notación: Las variables de estado se representan vectorialmente

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_C(t) \end{array} \right]$$

Aplicando la LVK tenemos:

$$e_{AB}(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = i(t)R + L\dot{i}(t) + v_C(t)$$

lo que expresado en términos de las variables de estado queda

$$e_{AB}(t) = x_1(t)R + L\dot{x_1}(t) + x_2(t)$$

despejando la primera derivada tenemos

$$\dot{x_1}(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e_{AB}(t) \tag{6}$$

Además, sabemos que

$$i(t) = C\dot{v_C}(t)$$

lo que expresado en términos de las variables de estado queda

$$\dot{x_2}(t) = \frac{1}{C}x_1(t)\ . \tag{7}$$

Las ecuaciones (6) y (7) caracterizan toda la dinámica del sistema. Anteriormente juntamos ambas para describir el sistema mediante una ecuacion de orden 2. En el caso de las ecuaciones de estado simplemente utilizamos estas dos ecuaciones de primer orden.

Utilizando la representación vectorial para $\boldsymbol{x}(t)$ obtenemos que (6) y (7) se pueden expresar de forma conjunta mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} e_{AB}(t) \tag{8}$$

La salida en función del mismo vector de estado y la entrada es

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0 \quad 0]\, e_{AB}(t) \tag{9}$$

En términos de los controlistas, (8) es llamada Ecuaciones de Estado del sistema y (9) es llamada Ecuación de Observación

En general, un sistema descrito por una EDO de orden N, tiene N ecuaciones de estado, las que se definen mediante el vector N-dimensional de variables de estado:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} .$$

Recordar que cada una de estas variables de estado "internas" corresponden al conjunto más pequeño de variables que pueden representar completamente al sistema en cualquier estado del tiempo.

Así, cualquier sistema L.T.I con N variables de estado, P entradas y Q salidas puede ser representado por

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)\end{aligned}$$

Uno puede facilmente resolver un sistema descrito de esta forma en Matlab usando, por ejemplo, el comando `ode45`.

Resumen capítulo:

En este capítulo hemos revisado los siguientes conceptos importantes:

- Modelación de sistemas mediante ecuaciones diferenciales y de diferencias finitas
- Metodologías para resolver ecuaciones diferenciales y de diferencias
- Ecuaciones de estado para representar sistemas
- Sistemas de primer y segundo orden en el dominio del tiempo

En el siguiente capítulo revisaremos en detalle las transformaciones y sus aplicaciones.